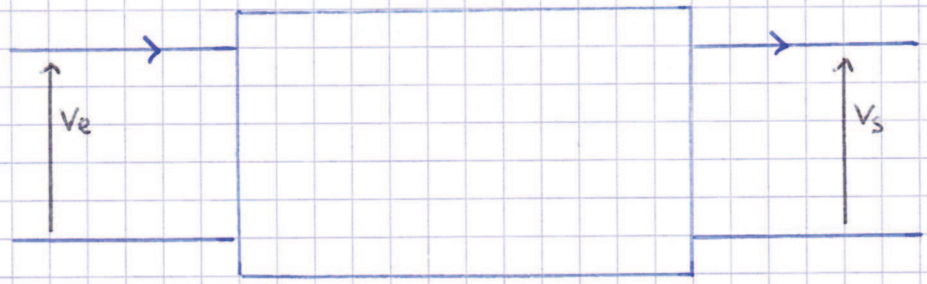
Mardi 05 Septembre 2017

FILTRAGE

I Rappels

① Définitions

→ Quadripole



→ Le filtre agit différemment sur la tension d'entrée en fonction de sa fréquence.

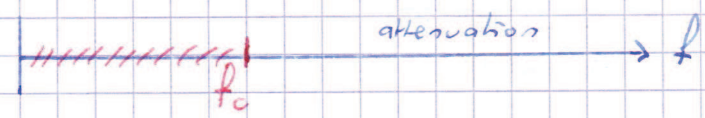
(Présence de condensateurs, de bobines, d'amplificateurs)

Passifs : Consomment de l'énergie

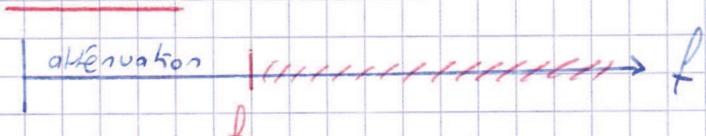
Actifs : Présence d'amplificateurs

⊛ Différents types de filtres :

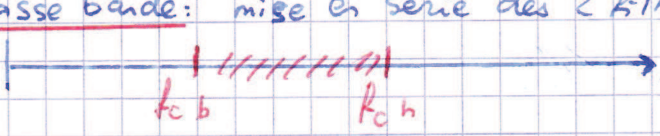
→ **Passe-bas :** laissent passer les basses fréquences.



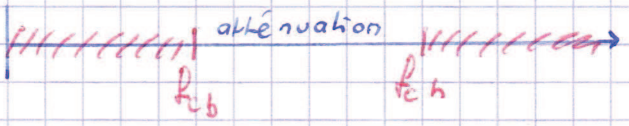
→ **Passe-haut**



→ **Passe bande :** mise en série des 2 filtres



③ Coupe bande ou rejecteur de bande



② Fonctions de transfert

Entrée : Signal sinusoïdal caracterisé par l'amplitude et la fréquence.
On fait varier la fréquence du signal appliqué en entrée.

$$\boxed{V_e(t) = V_0 \cos(2\pi f t)}$$

Régime sinusoïdal forcé : tous les signaux vont evoluer à la meme fréquence.

⇒ Le signal de sortie sera à la meme fréquence (déphasé).
d'amplitude differente.

$$\boxed{V_s(t) = V_1 \cos(2\pi f t + \varphi)}$$

Notation complexe :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ \underline{v_e}(t) = V_0\, e^{j(\omega t)} \\ \cdot\ \underline{v_s}(t) = V_1\, e^{j(\omega t + \varphi)} \end{array}}$$

Notation réduite :

$$\boxed{\underline{V_e} = V_0 \qquad \underline{V_s} = V_1\, e^{j\varphi}}$$

phase à l'origine

Voir graphique : Differentes amplitudes, meme periodes ----

③

* **Fonction de transfert :** $\boxed{\underline{T} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{V_1}{V_0} e^{j\varphi}}$

Rapport des amplitudes. $\frac{V_1}{V_0}$

φ: déphasage de V_s par rapport à V_e

Elle dépend de la pulsation ω et de la fréquence.

• **Gain:** $$\boxed{\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log |\underline{T}| \\ G_{dB} &= 20 \log \frac{V_1}{V_0} \end{aligned}}$$

log = logarithme décimal

③ **Ordre d'un filtre**

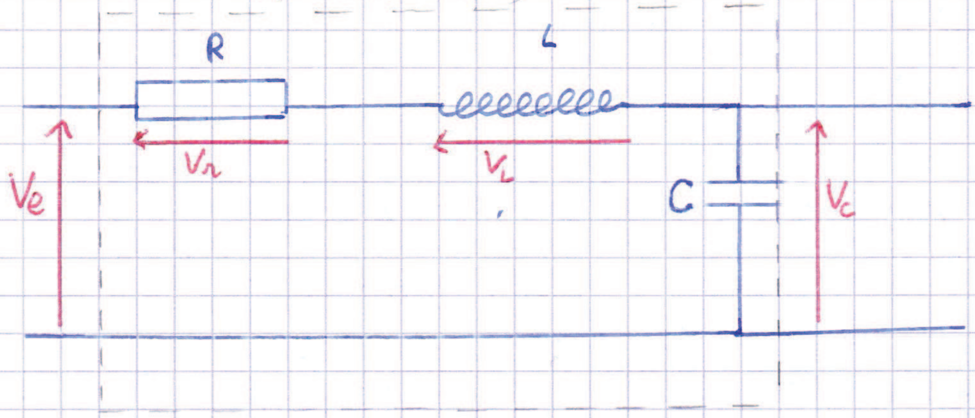
Passe bas 1^{er} ordre: $\underline{T}(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Passe haut 1^{er} ordre: $\underline{T}(\omega) = A_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Ordre d'un filtre: Puissance maximale du polynome en $j\omega$ qui décrit la fonction de transfert.

II Les filtres du 2e ordre

① Exemple. (Passe BAS) quadripole



On veut exprimer V_s en fonction de la tension d'entrée V_e

⊛ Loi des mailles:

$$V_e = V_R + V_L + V_c$$

$$V_e = RI + L\frac{di}{dt} + V_c$$

Condensateur: $i(t) = C\frac{du}{dt}$

Bobine: $u(t) = L\frac{di}{dt}$

Condensateur: $V_c = \frac{q}{C}$ $\qquad i = \frac{dq}{dt}$

$\rightarrow q = C\,V_c$ $\qquad \boxed{\rightarrow i = C\frac{dV_c}{dt}}$

Ce qui donne: $$V_e = \underbrace{RC\frac{dV_c}{dt}}_{V_R} + \underbrace{LC\frac{d^2V_c}{dt^2}}_{V_L} + V_c$$

$\frac{di}{dt}$ avec $i = C\frac{dv}{dt}$

→ Equation differentielle du 2e ordre.

⇒ Passage à la notation complexe.

$$\boxed{\underline{V_e} = RC\,j\omega\,\underline{V_c} + (j\omega)^2 LC\,\underline{V_c} + \underline{V_c}}$$

Rappels: $v(t) = V_0 \cos\omega t \longrightarrow \underline{V} = V_0$

$$\frac{dv}{dt} = -V_0\,\omega \sin(\omega t) = V_0\,\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow V_0\,\omega\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$V_0(j\omega)$$

Deriver un complexe revient a multiplier par $j\omega$ le complexe associé

On obtient donc $\underline{V_e} = \underline{V_c}\left(1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC\right)$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_c}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} V_e$$

On fait tendre ω à 0 : le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : $V_e = V_s$

$\omega \to +\infty$: le condensateur $\Leftrightarrow$ fil : $V_s = 0$

Filtre PASSE-BAS

⊛ Tension aux bornes de la bobine :

→ Diviseur de tension $V_L = \dfrac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} V_e$

$$T = \frac{V_L}{V_e} = \frac{(j\omega)^2 LC}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

Passe haut

⊛ Aux bornes de la résistance :

Passe Bande

$$\underline{V}_R = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{V_e}$$

$$\frac{V_r}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC}$$

Mercredi
Septembre

2. Forme Canonique de la fonction de transfert des filtres du 2^e ordre

$$\underline{T}(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

Pour l'exemple 1)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pulsation caracteristique : ω_0

$$D(\omega) = 1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

- Le terme de puissance 2 du dénominateur permet de déterminer le paramètre ω_0
- m : coefficient d'amortissement (sans dimension). Reel positif

↳ va influencer le temps de réponse du circuit

Exemple avec le circuit RLC

$$2\cancel{j}m\frac{\cancel{\omega}}{\omega_0} = \cancel{j}RC\cancel{\omega} \Rightarrow 2m = RC\,\omega_0 = RC\frac{1}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Filtre Passe Bas

- Numerateur réel $N(\omega) = A_0$ (Amplification dans la bande passante)

Filtre passe haut $N(\omega) = A_0\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

Filtre Passe Bande : $N(\omega) = A_0\, 2mj\frac{\omega}{\omega_0}$

3. Etude détaillée de la fonction de transfert du passe bas

* Etude asymptotique

Sur l'échelle des pulsations 

- $\omega \ll \omega_0 \qquad \dfrac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$\underline{T}(\omega) = A_0$ (le denominateur se réduit à 1. Les autres termes sont négligeables)

module $|\underline{T}(\omega)| = |A_0|$ valeur abs

Gain : $20 \log |A_0|$

Si $A_0 > 0$: $\varphi = 0$

Si $A_0 < 0$: $\varphi = \pi$

- $\omega \gg \omega_0 \qquad \dfrac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$(j^2 = -1)$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{A_0}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|\underline{T}(\omega)| = -\frac{|A_0|}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Gain : $20 \log |\underline{T}|$

$$= 20 \log |A_0| - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$= 20 \log |A_0| - 40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

Si $A_0 > 0$: $\varphi = -\pi$

Si $A_0 < 0$: $\varphi = 0$

Diagrammes de Bode asymptotiques

forme $y = ax + b$

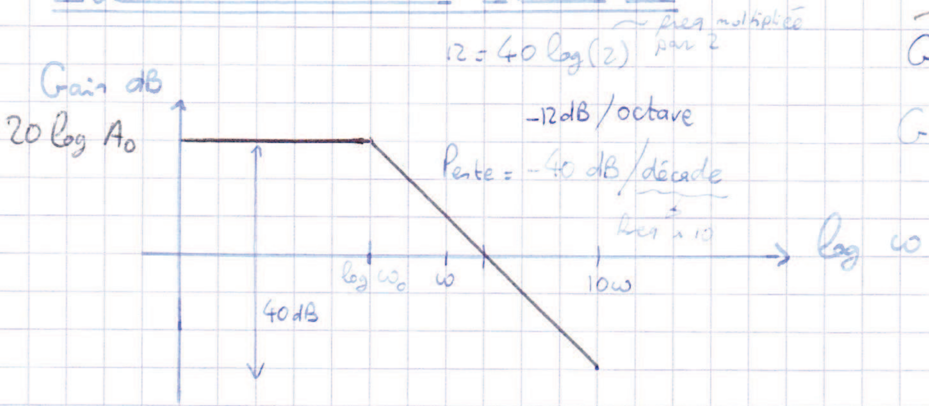
abscisses

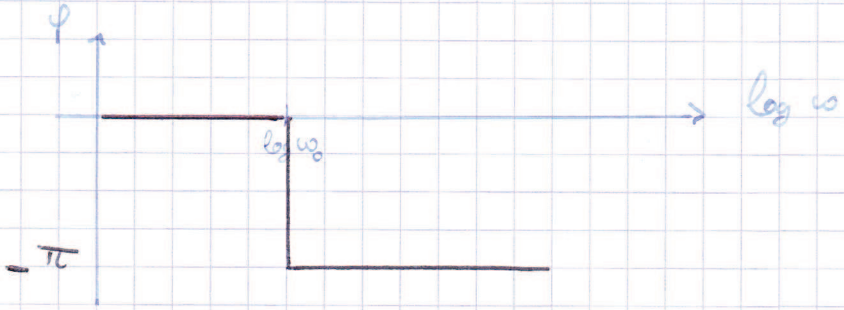
$\underline{Y}$

$G_{dB} = 20 \log |A_0| - 40 \boxed{\log \omega} + 40 \log \omega_0$

$G(10\omega) = 20 \log A_0 + 40 \log \omega_0 - 40 \log(10\omega)$

$= -40(\underbrace{\log 10}_{=1} + \log \omega$





Plus l'ordre est élevé plus l'atténuation est rapide

Valeur de $\underline{T}$ en ω_0 :

$$\underline{T}(\omega_0) = \frac{A_0}{2mj}$$

$$\boxed{\text{Gain: } 20 \log |A_0| - 20 \log(2m)}$$

Phase

$A_0 > 0$:

$\text{Arg}(A_0) = 0$

$$\varphi = \underbrace{0}_{\text{Arg(numérateur)}} - \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{Arg(dénominateur)}}$$

Si $20 \log 2m = 3$ alors f_0 est la fréquence de coupure

$\Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ coef amortissement critique

En ω_0 : le déphasage de V_s par rapport à V_e est toujours (quelque soit m) $-\frac{\pi}{2}$ $(A_0 > 0)$ ou de $\frac{\pi}{2}$ $(A_0 < 0)$

→ Le gain en ω_0 peut être supérieur à celui de la bande passante

$\Rightarrow$ Phénomène de raisonnance.

b) Etude de $|\underline{T}|$

m : taux d'amortissement

$$\underline{T}(\omega) = \frac{A_0}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + j^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$= \frac{|A_0|}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(2m\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$\rightarrow \sqrt{a^2+b^2}$

On montre que :

→ Il existe un maximum de $|\underline{T}(\omega)|$

Si $m < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$

Si $m > \frac{1}{\sqrt{2}}$ → ∅ raisonnance.

$\boxed{\text{Rappels :}}$ fréquence de coupure : fréquence pour laquelle le gain a chuté de -3dB par rapport au gain dans la bande passante.

Mardi 12 Septembre 201?

4 Filtres Passe bande

* Forme canonique de la fonction de transfert

$$\underline{T}(\omega) = A_0 \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2mj\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j \quad (j^2 = -1)$

On divise tout par le numérateur :

$$\hookrightarrow \underline{T}(\omega) = A_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{2m} j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{2m} j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

$$= A_0 \frac{1}{1 + j\frac{1}{2m}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$Q = \frac{1}{2m}$ = facteur de qualité

* Etude asymptotique

- $\omega \ll \omega_0$

$$\boxed{T = A_0 \, 2mj\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\boxed{G_{dB} = 20\log(|A_0|\, 2m) + 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

$$\boxed{A_0 > 0 \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}}$$

quadrature de phase (max de l'un correspond au 0 de l'autre)

- $\omega \gg \omega_0$ On ne garde que le terme d'ordre 2 (dominant) et on néglige les autres

$$\boxed{T(\omega) = A_0 \frac{2m}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad G_{dB} = 20\log(|A_0|2m) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

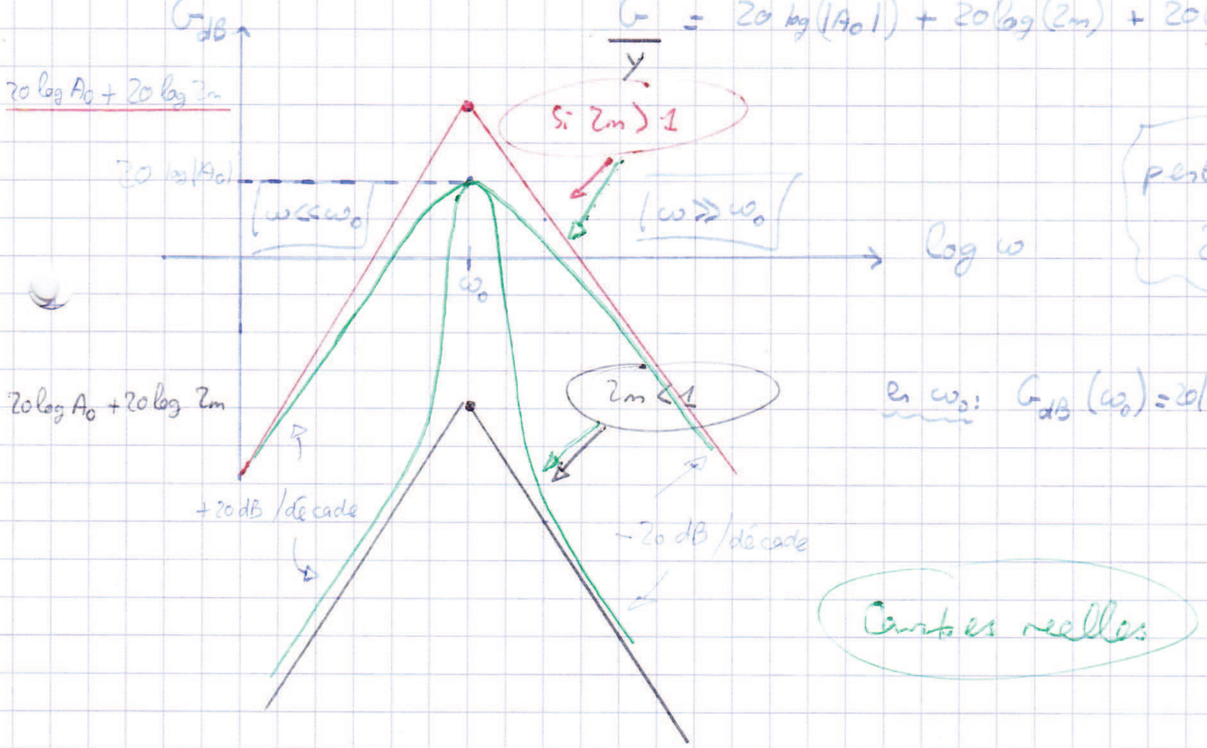
$$\boxed{A_0 > 0 : \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

Arg(Réel positif) = 0

$= 0 - Arg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ $\quad arg\frac{\omega}{\omega_0} = +\frac{\pi}{2}$

On peut également écrire : $G = 20\log(|A_0|) + 20\log(2m) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$$\underbrace{G}_{Y} = 20\log(|A_0|) + 20\log(2m) + \underbrace{20\log(\omega)}_{X} - 20\log(\omega_0)$$



pente de la droite : 20 dB/décade

en ω_0 : $G_{dB}(\omega_0) = 20\log(A_0) + 20\log(2m)$

$\underline{\omega \gg \omega_0}$ Rappel : $20 \log A_0 \, 2m \; - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$

$\downarrow$

Pente $-20\,dB$/décade

(cf graph précédent $\omega \gg \omega_0$)

$$G_{dB} = 20 \log |A_0| - 20 \log 2m$$

- <u>Valeur réelle de T en ω_0</u>

Rappel forme canonique : $T = A_0 \dfrac{1}{1 + j \frac{1}{2m}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

Donc $\boxed{T(\omega_0) = A_0}$

$$\boxed{G_{dB}(\omega_0) = 20 \log |A_0|}$$

Courbes réelles en vert graph précédent

$$\boxed{\varphi = 0 \text{ si } A_0 > 0}$$

Bande passante du passe bande

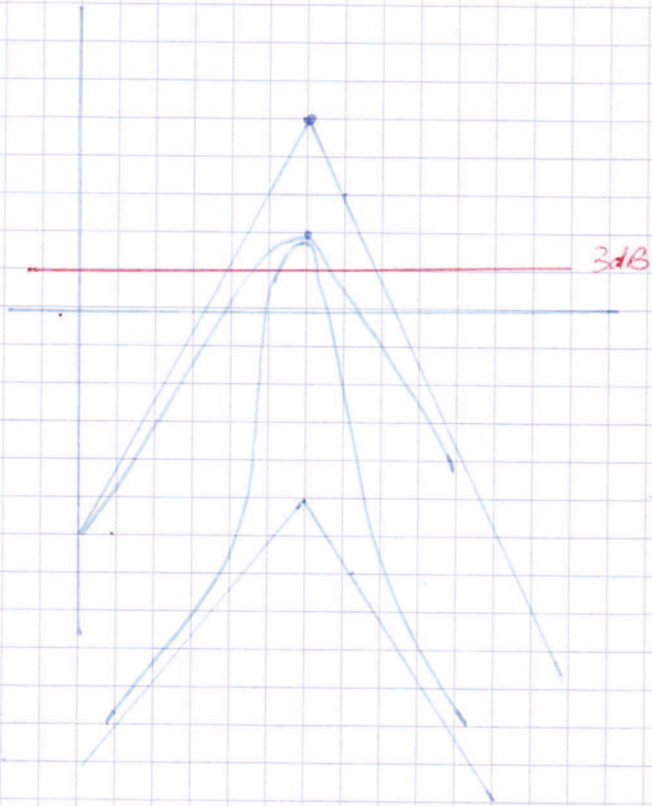
(cf Moodle)

$$G_{dB} = 20\log(A_0) = -3dB \quad = 20\log A_0 - 20\log\sqrt{2} = 20\log\left(\frac{|A_0|}{\sqrt{2}}\right)$$

2 fréquences de coupure : basse et haute.

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{|A_0|}{\sqrt{2}}$$



$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2m}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$$

$$\Downarrow$$

2 pulsations de coupure ω_B et ω_H

$$\boxed{\text{Bande passante} = \omega_H - \omega_B = 2m\,\omega_0}$$