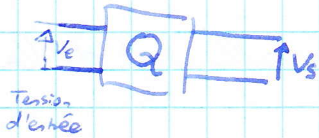
FILTRAGE

I - Generalités

1. Definition

Def : C'est un quadripole


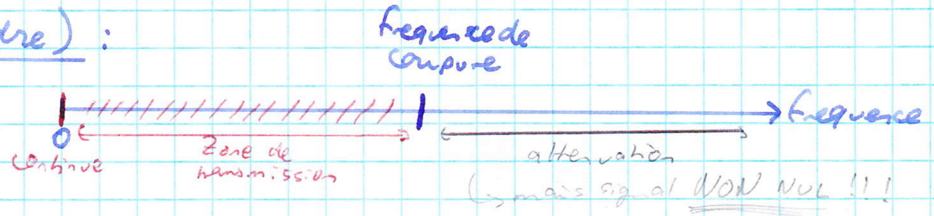
Il y a plusieurs types de quadripoles :

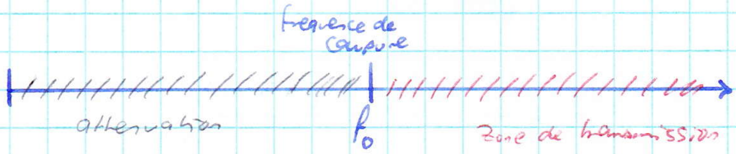
- Passifs : contenant des élements qui ne peuvent que consommer de l'energie (Resistance, Condensateur, Bobine). Il n'en produisent pas
- Actifs : Contient des amplis

Notion de filtres : transmettent certaines fréquences du signal d'entrée et en atténuent d'autres.

La variable sur laquelle on doit agir est la fréquence

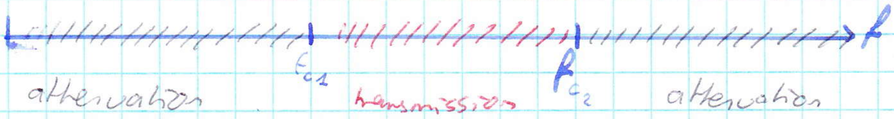
Types de filtres : (du 1er ordre) :

• Passe - bas


• Passe haut


Logiciel de simulation : multisim

- **Filtre passe bande** (filtre du 2e ordre)



* Les circuits agissent comme des filtres car les impédences des composants dépendent de la fréquence.

Rappels :

- Impédence d'un condensateur : $Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$ $\quad \omega = 2\pi f$
- Impedence d'une bobine $Z_L = jL\omega$

On étudie les filtres en régime sinusoïdal

↪ Notation complexe

2. Rappels sur la notation complexe

Expression réelle

phase à l'origine

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$\omega = 2\pi f$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

Complexe

$$\underline{v(t)} = V_0 \, e^{j(\omega t + \varphi)}$$

notation complexe

$$= V_0 \, e^{j\varphi} \times e^{j\omega t}$$

Notation complexe réduite

$$\underline{V} = V_0 \, e^{j\varphi}$$

Pour une tension sinusoïdale : $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$\rightarrow \underline{V} = V_0 \, e^{j\varphi}$$

3) Fonction de transfert

* C'est un nb complexe

$$\boxed{T(\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}}$$

* En régime sinusoïdal : $\boxed{v_e(t) = V_0 \cos(\omega t)}$ $\omega = 2\pi f$

$$V_s(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

déphasage de V_s par rapport à V_e

Complexe : $\boxed{\underline{V_e} = V_0 \, \underbrace{e^{j0}}_{e^0=1} = V_0}$

$\boxed{\underline{V_s} = V_1 \, e^{j\varphi}}$

$$\underline{T} = \frac{V_1 \, e^{j\varphi}}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} e^{j\varphi}$$

$|\underline{T}|$ = rapport des amplitudes de V_s et V_e

$Arg(\underline{T})$: déphasage de V_s par rapport à V_e

Etudier un filtre consiste à étudier les variations de la fonction de transfert en fonction de la fréquence.

variation d'un facteur 10

$|\underline{T}(\omega)|$ peut varier sur plusieurs décade

$\varphi(\omega)$

↳ On introduit la grandeur Gain (en dB)

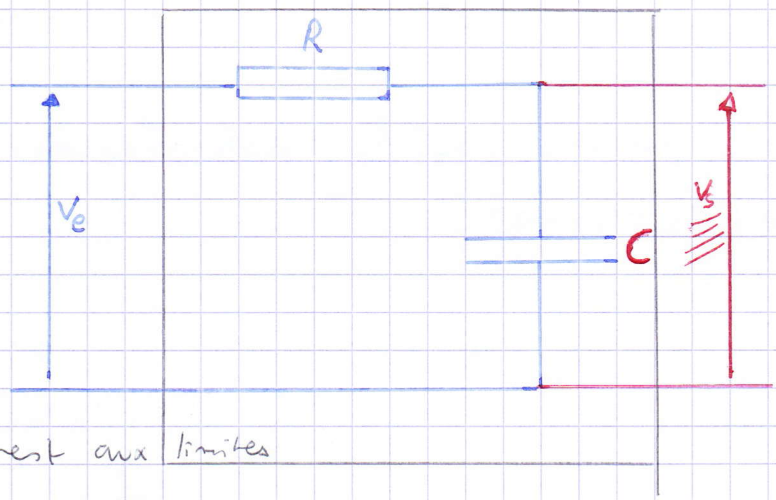
$$\boxed{G_{dB} = 20 \log |\underline{T}(\omega)|}$$

⇒ Diagramme de Bode
- G_{dB} en f° de $\log \omega$
- φ en f° de $\log \omega$

* Echelle linéaire : On voit bien les hautes fréquences mais pas les basses
* Echelle logarithmique : voit bien les basses fréquences, pas les hautes.

II - Etude des filtres du 1er ordre.

1. Filtre passe bas.

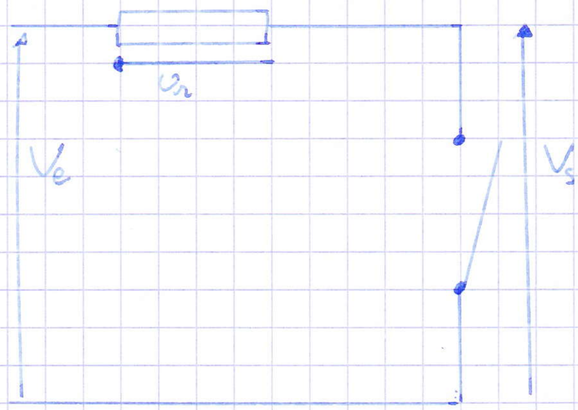


a) Comportement aux limites

Le comportement du condensateur dépend de ω

$$Z_c = \frac{1}{jC\omega}$$

$\omega \to 0$: $Z_c \to \infty$
↳ ⇔ circuit ouvert

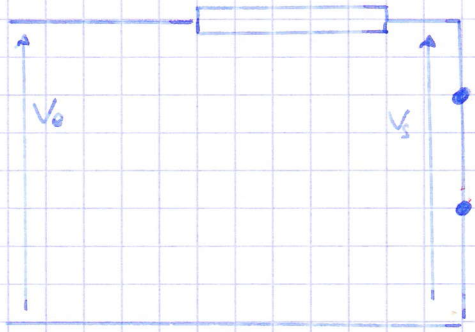


$$U_r = V_e - V_s$$
$$= RI \quad \text{(interrupteur ouvert : } I = 0\text{)}$$

$V_e = V_s + U_r$

$\Rightarrow U_r = V_e - V_s$

$\omega \to \infty$: $Z_c \to 0$
(interrupteur)
FERMÉ



$\boxed{V_s = 0}$

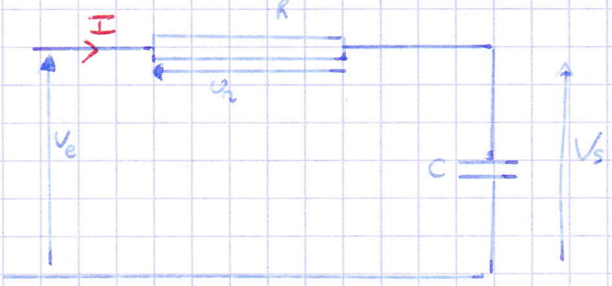
pour ω grand

$\Rightarrow$ ne laisse pas passer les hautes fréquences.

Ce circuit ne va pas transmettre les hautes fréquences

$\Rightarrow$ PASSE-BAS.

b) Fonction transfert



$$\underline{V_e} = \underline{U_R} + \underline{V_s}$$

$$V_e = R\underline{I} + \underline{Z_c}\,\underline{I}$$

$$= \left(R + \frac{1}{jc\omega}\right)\underline{I}$$

$$\underline{V_s} = \frac{1}{jc\omega}\,\underline{I}$$

$$\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{\frac{1}{jc\omega}}{R + \frac{1}{jc\omega}}$$ $\to$ Loi du diviseur de tension

$$\boxed{\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{1}{1 + jRc\omega}}$$

$\hookrightarrow$ Ordre 1 car polynome en $j\omega$ à la puissance 1 dépend des composants

→ On introduit la pulsation de coupure $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

$$T(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

forme canonique d'un filtre passe bas du 1er ordre.

A_0 : amplification dans la bande passante.

c) Diagramme de Bode

* Etude asymptotique

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \underline{T}(\omega) = 1$ (on neglige $jRC\omega$)

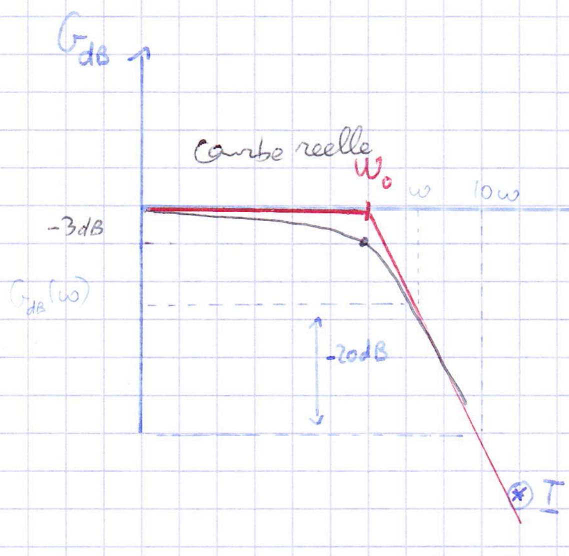
$G_{dB} = 20 \log(1)$ $\qquad \varphi = 0$

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \Rightarrow$ On garde que la partie imaginaire, on neglige la partie Reelle.

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\begin{cases} \overset{y}{\boxed{G_{dB}}} = 20 \log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 20 \log(\omega_0) - 20 \overset{x}{\boxed{\log(\omega)}} \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Pente :

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)$$

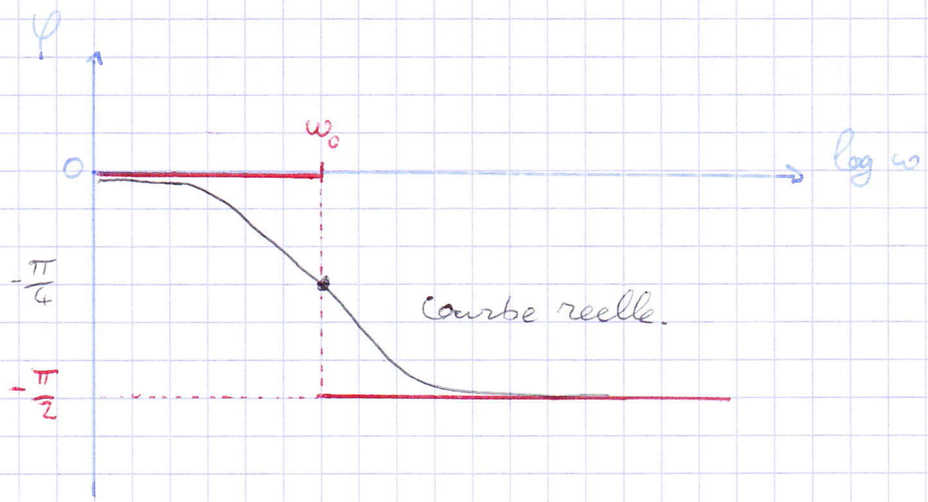
$$G_{dB}(10\omega) = 20\log(\omega_0) - 20\log(10\omega)$$

$$= 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega) \underbrace{-20\log(10)}_{=-20}$$

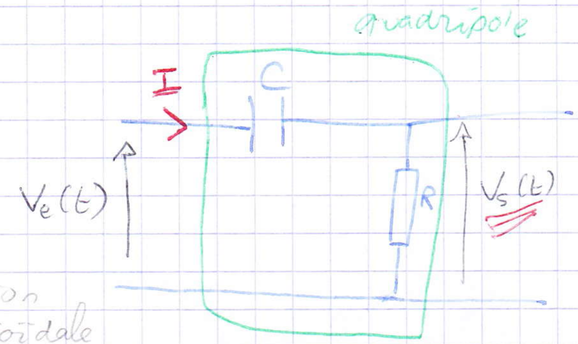
$\log(10) = 1$

Pente: $-20\,dB/decade$

$*\ \underline{T}(\omega_0) = \frac{1}{1+j}$ $\quad |\underline{T}(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$ $\rightarrow G_{dB} = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$; $\rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$



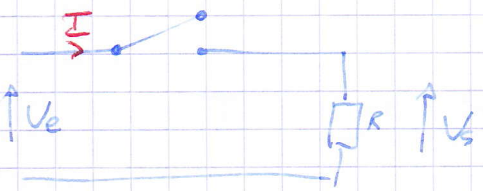
2) Filtre passe haut



Regime sinusoïdale
↳ Notation complexe

a) Etude aux limites

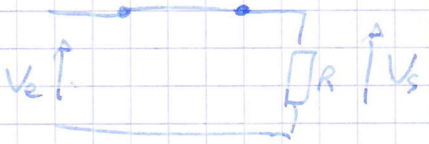
$\omega \to 0$ (= tension continue). $Z_c = \dfrac{1}{jC\omega} \to Z_c = \infty$



pour ω petit

$V_s = RI = 0$ (interrupteur ouvert)

$\omega \to \infty \Rightarrow Z_c \to 0$ ⇔ interrupteur fermé



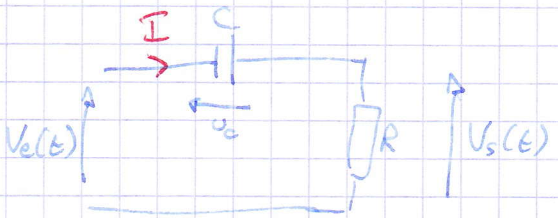
$V_s = V_e$ pour ω grand

⇒ laisse passer les grandes fréquences : passe haut.

b) Fonction de transfert

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$$

• Loi des mailles



$$\underline{V_e} = \underline{U_c} + \underline{V_s}$$

$$\underline{V_e} = Z_c\,\underline{I} + R\underline{I}$$

$$\underline{V_e} = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{I} + R\underline{I}$$

$$\underline{V_e} = \underline{I}\left(\frac{1}{jC\omega} + R\right) \rightarrow \underline{I} = \frac{V_e}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

$$\boxed{V_s = R\underline{I} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\,\underline{V_e}} \longrightarrow \text{Diviseur de Tension}$$

$$V_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\;\frac{\times jC\omega}{\times jC\omega} = \frac{R\,jC\omega}{1 + jRC\omega}\,\underline{V_e}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \rightarrow \underline{T}(\omega) = A_0\,\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

ω_0 = pulsation de coupure du filtre. $= \frac{1}{RC}$

A_0 = amplification dans la bande passante $(A_0 = 1)$

Diagrammes de Bode

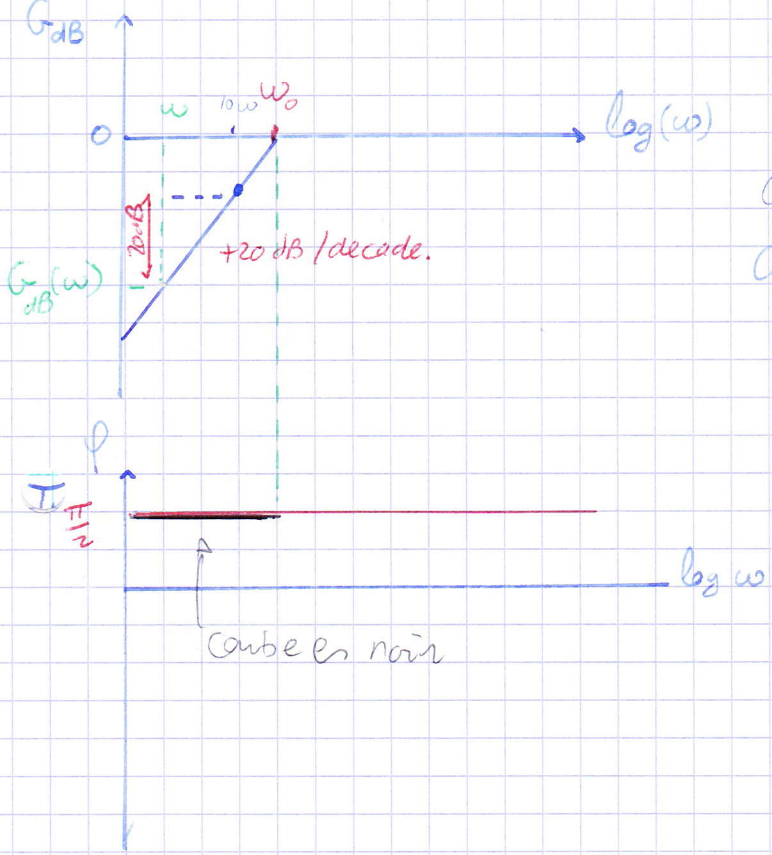
$$\underline{T}(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$\omega \ll \omega_0 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$$\underline{T}(\omega) = j\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$G_{dB} = 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 20\log(\omega) - 20\log(\omega_0)$ car $\omega > 0$, $\omega_0 > 0$



$G_{dB}(\omega) = 20\log(\omega) - 20\log(\omega_0)$

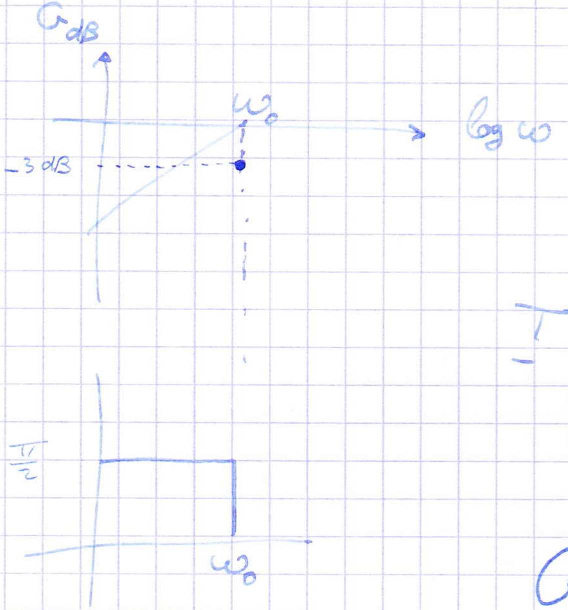
$G_{dB}(10\omega) = 20\log(10\omega) - 20\log(\omega_0)$

$= \underbrace{20\log(10)}_{20} + \underbrace{20\log(\omega) - 20\log(\omega_0)}_{G_{dB}(\omega)}$

$= 20 + G_{dB}(\omega)$

$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \rightarrow T(\omega) = 1$

$G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$



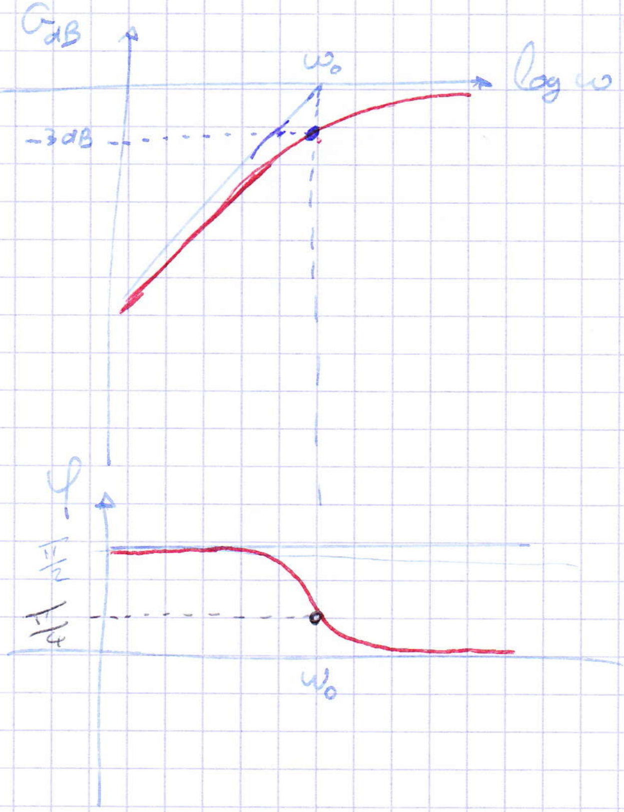
$$\underline{T}(\omega_0) = \frac{j}{1+j} \Rightarrow |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$$

Diagrammes:

Courbe passe haut.

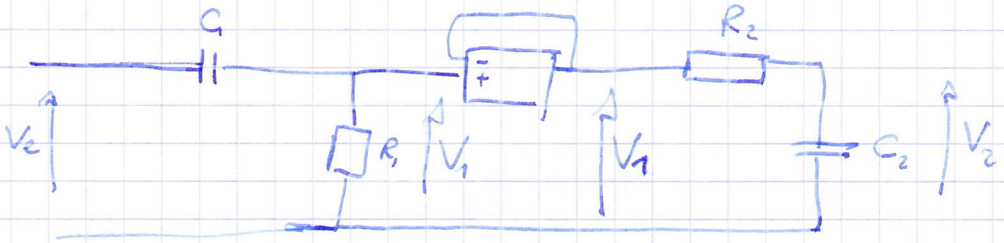


$$Arg(\underline{T}) = Arg(j) - Arg(1+j)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (45°)$$

Si on prend la tension sur la resistance :
↳ passe haut

Realisation d'un filtre passe bande.



$$\underline{V_1} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC\omega}} V_e$$

$$\underline{V_2} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} V_1$$

$$V_2 = \underbrace{T_{2\ \text{passe bas}} \quad T_{1\ \text{passe haut}}}_{\text{passe bande}} \times V_e$$